

Gl. eine Wellenfunktion für das Viel-Teilchen-Problem im Sinne einer expliziten Präzisierung des *Independent Pair Model* zusammengesetzt; diese Wellenfunktion stimmt im wesentlichen mit derjenigen überein, die sich in der BRUECKNERSchen Näherung ergibt. In Fall a scheint uns allerdings bereits die Konstruktion dieser Wellenfunktion nicht möglich zu sein. Die Verfasser versuchen zu zeigen, daß diese Wellenfunktion eine gute Annäherung an die richtige Wellenfunktion darstellt und vertreten die Ansicht, daß die lokalisierten Zustände der B.G.-Gl. sich auf den „Normalzustand“ von Kernmaterie nicht auswirken, sondern nur auf einen etwaigen „supraleitenden“ Zustand¹². Nun beziehen sich aber unsere Überlegungen gerade auf den „Normalzustand“, wie er sich bei konsequenter Fortentwicklung des BRUECKNERSchen Verfahrens im Sinne von GOLDSTONE ergibt; die erforderlich scheinenden Modifikationen des Verfahrens könnten allerdings auf einen „supraleitenden“ Zustand führen. Auch scheinen uns die Überlegungen von DE SHALIT und WEISSKOPF nicht zwingend zu sein.

Man betrachte hierzu etwa folgendes stark vereinfachte Anwendungsbeispiel der Schlußweise von DE SHALIT und WEISSKOPF: Ein HAMILTON-Operator sei aufgespalten in der Form $H = H^0 + H'$; Ψ_j seien

Eigenfunktionen von H^0 ; dabei seien Ψ_1 und Ψ_2 energetisch entartet (Energie E_1). Jetzt sei fälschlich angenommen, daß Ψ_1 eine gute Annäherung an die richtige Lösung darstelle. Mit den Verfassern bildet man dann

$$(H - E) \Psi_1 = [E_1 + (\Psi_1, H' \Psi_1) - E] \Psi_1 + \sum_{j \neq 1} (\Psi_j, H' \Psi_1) \Psi_j \equiv W \quad (19)$$

und gibt sich damit zufrieden, daß W unter Umständen klein ist. Die richtige nullte Näherung ergibt sich jedoch unabhängig von der Größe von H' aus einem Säkularproblem als Linearkombination von Ψ_1 und Ψ_2 .

Ein vertieftes Verständnis des quantenmechanischen Viel-Teilchen-Problems und der Rolle der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung habe ich während eines Aufenthalts am Massachusetts Institute of Technology im akademischen Jahr 1956/57 in der Gruppe von Herrn Prof. WEISSKOPF gewonnen. Ich möchte Herrn Prof. WEISSKOPF auch an dieser Stelle für fördernde Diskussionen über den Problemkreis danken. Herrn Dr. BREINIG danke ich für die kritische Durchsicht früherer Fassungen der Arbeit, für Diskussionen und für die Mitteilung von Ergebnissen aus der Sommerschule in Les Houches. Herr Dr. EMERY hat mir freundlicherweise mitgeteilt, wie sich ihm die historische Entwicklung des Problems darstellt.

¹² A. BOHR, B. R. MOTTelson u. D. PINES, Phys. Rev. **110**, 936 [1958].

Zum Teilchen-Loch-Übergang in Systemen nahezu unabhängiger Fermi-Teilchen

VON GERHART LÜDERS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München
(Z. Naturforsch. **14 a**, 5—7 [1959]; eingegangen am 14. September 1958)

The particle-hole relation in systems of nearly independent Fermions becomes more natural and transparent if it is chosen as an anti-linear relation.

Die von HEISENBERG¹ aufgedeckte Beziehung zwischen Löcher- und Teilchenzuständen in Systemen nahezu unabhängiger FERMI-Teilchen gewinnt an Allgemeingültigkeit und Durchsichtigkeit, wenn der Zusammenhang zwischen einer Teilchenfunktion Ψ und der zugehörigen Löcherfunktion Φ antilinear gewählt wird.

Eine „Schale“² nahezu wechselwirkungsfreier FERMI-Teilchen sei dadurch definiert, daß sie, bei Vernachlässigung der Wechselwirkung der Teilchen untereinander, mit einem Ein-Teilchen-Zustand auch alle damit genau oder nahezu entarteten Ein-Teilchen-Zustände enthält. Die Zahl der Teilchen in der abgeschlossenen Schale heiße n_s ; man kann dabei

¹ W. HEISENBERG, Ann. Phys., Lpz. (V) **10**, 888 [1931]. Spätere Arbeiten u. a.: E. U. CONDON u. G. H. SHORTLEY, The Theory of Atomic Spectra, University Press, Cambridge 1935, Kap. XIII; F. HUND, Z. Phys. **105**, 202 [1937]; G. RACAH, Phys. Rev. **62**, 438 [1942]; D. R. INGLIS, Rev. Mod. Phys. **25**, 390 [1953]; D. BRINK u. G. SATCHEL, Nuovo Cim. **4**, 549 [1956];

V. G. NEUDACHIN, J. Exp. Theor. Phys. UdSSR **33**, 918 [1957], engl. Übers. Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys. USSR **6**, 706 [1958].

² Wir verwenden die Terminologie der Atom- und Kernphysik; in der Physik der Metallelektronen spricht man von einem „Band“.



Teilchen in „inneren“ Schalen berücksichtigen oder fortlassen. Die normierten und paarweise orthogonalen Ein-Teilchen-Wellenfunktionen in der Schale mögen mit ψ_α ($\alpha = 1 \dots n_s$) bezeichnet werden.

Eine beliebige Teilchen-Wellenfunktion (mit Teilchenzahl $n_t < n_s$) in der Schale kann in der Form

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{n_t!}} a_{\alpha\beta\dots\eta} \psi_\alpha(1) \psi_\beta(2) \dots \psi_\eta(n_t) \quad (1)$$

(Summationsvorschrift!) geschrieben werden; wegen des PAULI-Prinzips ist $a_{\alpha\beta\dots\eta}$ ein vollständig antisymmetrischer Tensor n_t -ter Stufe. Die Normierungsbedingung für die Wellenfunktion (1) lautet

$$(\Psi, \Psi) = \frac{1}{n_t!} a_{\alpha\beta\dots\eta}^* a_{\alpha\beta\dots\eta} = 1. \quad (2)$$

Der Teilchen-Wellenfunktion (1) werde jetzt die Löcher-Wellenfunktion (abhängig von den Koordinaten von $n_l = n_s - n_t$ Löchern)

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{n_l!}} b_{\lambda\mu\dots\sigma} \psi_\lambda(1) \psi_\mu(2) \dots \psi_\sigma(n_l) \quad (3)$$

$$\text{mit} \quad b_{\lambda\mu\dots\sigma} = \frac{1}{n_t!} a_{\alpha\beta\dots\eta}^* \varepsilon_{\alpha\beta\dots\eta\lambda\mu\dots\sigma} \quad (4)$$

zugeordnet; $\varepsilon_{\alpha\beta\dots\sigma}$ ist der antisymmetrische Tensor n_s -ter Stufe (RICCI-Tensor) mit $\varepsilon_{123\dots n_s} = +1$. Die Umkehrung von Gl. (4) lautet

$$a_{\lambda\mu\dots\sigma} = \frac{1}{n_l!} b_{\lambda\mu\dots\sigma}^* \varepsilon_{\alpha\beta\dots\eta\lambda\mu\dots\sigma}. \quad (5)$$

Folgerungen: 1. Der Übergang $\Psi \longleftrightarrow \Phi$ ist (bis auf einen Phasenfaktor) invariant gegenüber einem Wechsel der Basis ψ_α in der Schale; das erweist ihn als besonders natürlich. — 2. Der Zusammenhang ist antilinear: Wenn $\Psi_1 \longleftrightarrow \Phi_1$ und $\Psi_2 \longleftrightarrow \Phi_2$, dann $\Psi_1 + \Psi_2 \longleftrightarrow \Phi_1 + \Phi_2$ sowie $\lambda \Psi_1 \longleftrightarrow \lambda^* \Phi_1$ (mit λ als c-Zahl). — 3. Es gilt

$$(\Psi_1, \Psi_2) = (\Phi_2, \Phi_1). \quad (6)$$

Beweis dieser Behauptungen durch elementares Nachrechnen.

Nunmehr ist die Vorschrift zu formulieren, durch die einem (in den Koordinaten aller Teilchen symmetrischen) Teilchenoperator Ω_t der zugehörige Löcheroperator Ω_l zugeordnet ist. Es wird sich zei-

gen, daß dabei stets gilt

$$(\Psi_1, \Omega_t \Psi_2) = (\Phi_2, \Omega_l \Phi_1). \quad (7)$$

Ein-Teilchen-Operator. Es sei

$$\Omega_t = \Sigma A_i \quad (8)$$

mit Summation über n_t Teilchen. Das zugehörige Ω_l ist gegeben durch

$$\Omega_l = M - \Sigma A_j \quad (9)$$

(Summation über n_l Löcher); außer dem Ein-Loch-Operator A kommt auch ein Vielfaches des Einheitsoperators

$$M = \Sigma (\psi_\alpha, A \psi_\alpha) \quad (10)$$

(Summation über alle Zustände in der Schale) vor. Der elementare Beweis von Gl. (7) sei dem Leser überlassen³. Gl. (9) ist unmittelbar anschaulich⁴, da durch den Übergang von Teilchen zu Löchern der Nullpunkt der Zählung der Größe A an den Schalenabschluß verschoben wird (dem entspricht die Größe M) und da der Hinzufügung eines Loches die Fortnahme eines Teilchens entspricht [Minuszeichen in Gl. (9)].

Zwei-Teilchen-Operator. Nunmehr sei

$$\Omega_t = \Sigma A_{ij} \quad (11)$$

(Summation über alle Teilchenpaare). Der zugehörige Löcheroperator, für den Gl. (7) gilt, ist dann durch

$$\Omega_l = N - \Sigma M_k + \Sigma A_{kl} \quad (12)$$

(Summation über alle Löcher bzw. Löcherpaare) gegeben. Hierbei bedeutet

$$N = \Sigma [\psi_\alpha \psi_\beta, A(\psi_\alpha \psi_\beta - \psi_\beta \psi_\alpha)] \quad (13)$$

(Summation über alle Zustandspaare in der Schale), während der Ein-Loch-Operator M am besten durch seine Matrixelemente

$$(\psi_\beta, M \psi_\gamma) = \Sigma [\psi_\alpha \psi_\beta, A(\psi_\alpha \psi_\gamma - \psi_\gamma \psi_\alpha)] \quad (14)$$

(Summe über alle ψ_α) definiert wird.

Mehr-Teilchen-Operatoren kommen praktisch nicht vor; für sie verläuft alles ganz analog.

Ein Säkularproblem für Teilchen geht nunmehr

³ Hierbei erweist sich die Antilinearität der Zuordnung $\Psi \longleftrightarrow \Phi$ als entscheidend; d. h. die Notwendigkeit, Gl. (7) zu beweisen statt einer mit rechter Seite $(\Phi_1, \Omega \Phi_2)$. Man stößt sonst auf die Schwierigkeit, daß Matrizenindizes nach dem Übergang zu Löchern „falsch“ stehen und fordert etwa mit HEISENBERG bestimmte Symmetrieeigenschaften der Ma-

trizen. Unsere Resultate sind von derartigen Einschränkungen frei.

⁴ Diese Anschaulichkeit beschränkt sich offenbar auf Erwartungswerte mit $\Psi_1 = \Psi_2$, $\Phi_1 = \Phi_2$ und gilt nicht für allgemeine Matrixelemente.

sehr einfach in eins für Löcher über. Die Teilchenfunktion Ψ sei als Linearkombination von Teilchenfunktionen Ψ_j (jede aufgebaut aus Ein-Teilchen-Zuständen der Schale) angesetzt; das Säkularproblem lautet dann

$$(\Psi_j, (H_t - E) \Psi) = 0 \quad (15)$$

für alle Ψ_j . Die zugehörige Löcherfunktion Φ ist eine Linearkombination der Löcherfunktionen Φ_j mit konjugiert-komplexen Entwicklungskoeffizienten; wegen Gln. (6) und (7) folgt aus Gl. (14)

$$(\Phi, (H_l - E) \Phi_j) = 0, \quad (16)$$

wobei H_l der durch obige Vorschriften aus H_t gewonnene Löcher-HAMILTON-Operator ist. Da H_l hermitesch und E reell ist, kann man aber statt dessen auch schreiben

$$(\Phi_j, (H_l - E) \Phi) = 0, \quad (17)$$

so daß sich ein Säkularproblem für Löcher von einem für Teilchen nur durch den jeweiligen HAMILTON-Operator unterscheidet.

Isotopenüberführung in geschmolzenem Rubidiummetall bei verschiedenen Temperaturen

Von A. LODDING

Aus dem Physikalischen Institut der Chalmers Technischen Hochschule, Göteborg

(Z. Naturforsch. 14 a, 7-9 [1959]; eingegangen am 25. Oktober 1958)

Der Isotopieeffekt beim Fließen von Gleichstrom in geschmolzenem Rubidium wurde bei vier Temperaturen untersucht. Der Masseneffekt μ zeigte eine deutliche Temperaturabhängigkeit, indem er zwischen 50 °C und 100 °C anstieg, oberhalb 150 °C aber wieder abfiel.

Zur Deutung des sogenannten HAEFFNER-Effekts sind Messungen seines Temperaturverhaltens in verschiedenen Metallen notwendig. Bisher hat man in dieser Hinsicht Indium¹, Gallium², Zinn³, Cadmium³ und Quecksilber⁴ untersucht. Mit Ausnahme von Cadmium ergaben sämtliche Metalle einen deutlichen Anstieg von μ (= relativer Unterschied der Wanderungsgeschwindigkeiten/relativer Massenunterschied der Isotope). Bei Cadmium waren die Masseneffekte bei 370 °C und 540 °C innerhalb der Fehlergrenzen gleich. In der vorliegenden Arbeit wurde μ für Rubidium bei 48 °C, 98 °C, 142 °C und 265 °C gemessen.

1. Experimentelles

Das Rubidiummetall (Dr. FRANKE, > 99% Reinheit) wurde unter Vakuum umgeschmolzen und in einem engen Glasrohr untergebracht. Nach Abkühlen auf etwa -70 °C wurde ein Stück des mit Metall gefüllten Rohres unter Toluol abgeschnitten und schnell in die Apparatur geworfen, worauf sogleich evakuiert wurde.

Die Apparatur bestand aus einer ca. 20 cm langen

senkrechten Glaskapillare (ca. 0,6 mm Innendurchmesser) mit einer eingeschmolzenen Wolframkathode am unteren Ende, oben mit einem weiten Glasrohr verbunden, in das ein 1 mm dicker Wolframstab als Anode durch einen Gummistopfen eingeführt war.

Das Füllen der Kapillaren erfolgte, wie früher^{3,5} beschrieben, durch Vakuum. Für 265 °C wurde eine Nitratmischung als Temperaturbad verwendet, sonst Paraffinöl. Die Badtemperatur wurde durch Kontaktthermometer konstant gehalten. Die Temperatur der Metallsäule wurde aus dem Wärmeleitvermögen des Pyrex-Glases berechnet. Zur Messung der transportierten Ladungsmenge dienten geeichte Knallgas-Gleichstrommesser. Die Versuchsdaten zeigt Tab. 1.

Versuch	Temperatur (°C)	Versuchsdauer (h)	Durchschn.-strom (A)	Ladungsmenge (Ah)
A	48 ± 5	305	10,8	3299 ± 50
B	98 ± 5	244	10,8	2642 ± 50
C	142 ± 6	237	10,4	2472 ± 50
D	265 ± 12	301	10,1	3042 ± 50

Tab. 1. Versuchsdaten.

Nach Abschalten des Stromes und Erstarren des Metalls wurde jede Kapillare in vier Proben (von der Anode aus mit 1, 2, 3 und 4 bezeichnet) zerlegt. Das

¹ A. LODDING, A. LUNDÉN u. H. v. UBISCH, Z. Naturforsch. 11 a, 139 [1956].

² M. GOLDMAN, G. NIEF u. E. ROTH, C. R. Acad. Sci., Paris 243, 1414 [1956].

³ A. LODDING, Z. Naturforsch. 12 a, 569 [1957].

⁴ I. V. BOGOJAVLENSKIJ, V. N. GRIGORJEV, N. S. RUDENKO u. D. G. DOLGOPOLOV, Sov. Phys. 6, 450 [1958] und J. Exp. Theor. Phys., USSR 33, 581 [1957].

⁵ A. LUNDÉN, C. REUTERSWÄRD u. A. LODDING, Z. Naturforsch. 10 a, 924 [1955].